Et Bidrag til Eqvationernes Theorie.

Af

C. F. Degen.

At ville skrive noget om Eqvationers Opløsning, efterat en Euler, en de la Grange, en Lambert og flere store Mænd have anvendt deres Aands Kræfter og Indsigter paa dette Emne, synes ligesaa overflødigt, i Henseende til Læseren, som forfængeligt, i Henseende til Forfatteren. Heller ikke vare nærværende Betragtninger bestemte til at træde frem for Lyset, men bleve i en privat Skrivelse for nogen Tid siden meddeelte Hr. Etatsraad Tetens.

Anledning til nærværende Betragtninger, der maaskee ikke ville være Analysens Dyrkere ubehagelige, fik jeg ved Sal. Lamberts Afhandling: **Om Ligningernes Forvandling og Opløsning.** I den 54de §. af anførte Afhandling opkastes nemlig det Spørgsmaal: **Af tvende givne Ligninger af forskiellig Grad at finde en tredie, hvis Rødder ere Summer af de tvende givnes, ꝛc.** Herved kom jeg paa den Tanke, at opløse og undersøge følgende Opgave:

For een given Ligning: $0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} + \ldots \pm W$, **at finde en anden:** $0 = y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - Cy^{m-3} + Dy^{m-4} - Ey^{m-5} + \ldots \pm W$, **i hvilken hver Rod y er en Summe af 2, 3, 4 ꝛc. Rødder af den givne Ligning?**

Jeg

Jeg forbigaaer her den almindelige Opløsning, og beskiæftiger mig blot med det Tilfælde, da enhver Rod y er liig Summen af $(m-1)$ Rødder x. Min Opløsning bliver da følgende:

Man antage, at Rødderne i den givne Ligning ere: p, q, r, s, t, u rc., saa er

1) Deres Antal $= m$, 2) deres Summe $= a$.

Nu er y (efter Forudsætningen) stedse liig Summen af $(m-1)$ Rødder, det er, y har stedse een af følgende Værdier: $a-p$, $a-q$, $a-r$, $a-s$, $a-t$ rc. Heraf flyde følgende Ligninger:

$$y-a+p=0,$$
$$y-a+q=0,$$
$$y-a+r=0,$$
$$y-a+s=0,$$
rc. rc.

Sættes nu, for KorthEds Skyld, $y-a=z$, saa bliver:

$$0=(z+p)(z+q)(z+r)(z+s)(\text{rc. rc.})$$

en Ligning, i hvilken Coefficienterne ikkun i Henseende til Positiviteten og Negativiteten adskille sig fra Coefficienterne i den givne Ligning. Man finder altsaa:

$$0=z^m+az^{m-1}+bz^{m-2}+cz^{m-3}+dz^{m-4}+ez^{m-5}+\ldots+W,$$

eller, ved igien at indføre y i Ligningen:

$$0=(y-a)^m+a(y-a)^{m-1}+b(y-a)^{m-2}+c(y-a)^{m-3}+\ldots+W.$$

Udvikles disse Digniteter, da erholder man følgende almindelige Udtryk:

For $(y-a)^m$ .... $\pm\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k}a^ky^{m-k}$;

For $a(y-a)^{m-1}$ ... $\mp\dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-1)}a^ky^{m-k}$;

For $b(y-a)^{m-2}$ ... $\pm\dfrac{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-2)}ba^{k-2}y^{m-k}$;

For $c(y-a)^{m-3} \ldots \mp \frac{(m-3)(m-4)(m-5)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-3)} ca^{k-3} y^{m-k}$;

ꝛc. ꝛc.

hvori, som bekiendt, det øverste Tegn gielder, naar k er et lige Tal, det underste derimod, naar k er ulige. Da nu $\pm \left(\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^k y^{m-k} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)} a^k y^{m-k} \right)$ kan sammentrækkes til $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$, saa erholdes den til y^{m-k} svarende Coefficient i følgende almindelige Udtryk:

$$\text{Coefficienten } y^{m-k} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^k$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-2)} a^{k-2} b$$
$$- \frac{(m-3)(m-4)(m-5)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-3)} a^{k-3} c$$
$$+ \frac{(m-4)(m-5)(m-6)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-4)} a^{k-4} d$$

ꝛc. ꝛc. med afvexlende Tegn.

Sættes i dette almindelige Udtryk, isteden for k, efterhaanden Værdierne 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc., da finder man de den søgte Ligning bestemmende Coefficienter:

$$A = (m-1)a$$
$$B = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} a^2 + b$$
$$C = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + (m-2)ab - c$$
$$D = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} a^2 b - (m-3)ac + d$$
$$E = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b - \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} a^2 c + (m-4)ad - e$$

F =

$$F = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^6$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 b - \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 c$$
$$- \frac{(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2} a^2 d - (m-5) ae + f$$

hvoraf de følgende Coefficienters Form let udledes.

Da nu saaledes A, B, C, D og alle øvrige Coefficienter kunne bestemmes ved Hielp af ovenanførte Formeler, og altsaa Ligningen $0 = y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - Cy^{m-3} + Dy^{m-4} - \ldots \pm W$ kan fremstilles, endog numerisk, naar den givne Ligning er af denne Beskaffenhed, saa kan Opgaven vel for saavidt ansees for opløst; men da denne Opløsning — naar man abstraherer fra sammes Methode — mere blev en Curiositet, end nyttig i Udøvelsen, især naar man blot vilde indskrænke sig til hine Coefficienters Opdagelse; saa troer jeg mig beføiet at angive i nogle Exempler, den Synspunct, hvorfra jeg forestiller mig Sagen. Maaskee andre, med mere giennemtrængende Blik, derved foranlediges til at sku: Æmnet fra endnu flere og vigtigere Sider. Man tillade mig derfor følgende

Anvendelse af den omvendte Methode.

Sættes $m = 2$, eller $x^2 - ax + b = 0$, saa erholdes, efter ovenanførte Formeler, $A = a$ og $B = b$, altsaa $y^2 - ay + b = 0$. Denne Ligning maa ogsaa, efter Sagens Natur, være identisk med den givne; thi da hvert y er liig Summen af $(m-1)$ Rødder i den givne Ligning, og $m - 1 = 1$, saa maa hvert y være liigt eet x, det er i Almindelighed $y = x$. Herved er altsaa intet videre at anmærke.

Lad os nu antage $m = 3$. Her bliver da:

$$A = 2a, \quad B = a^2 + b, \text{ og } C = ab - c.$$

Følgelig er Ligningen $y^3 - 2ay^2 + (a^2 + b)y - (ab - c) = 0$ af den Beskaffenhed at hvert y er liig Summen af tvende x i følgende Ligning:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Vende vi nu Spørgsmaalet om, og ansee denne sidste Ligning som den der søges, og $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$, som den givne; da bliver $a = \frac{1}{2}A$, $b = B - \frac{1}{4}A^2$, $c = ab - C = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{8}A^3 - C$; og Ligningen:

$$x^3 - \frac{1}{2}Ax^2 + (B - \frac{1}{4}A^2)x - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{8}A^3 + C = 0$$

er af den Beskaffenhed, at tvende af dens Rødder tilsammentagne stedse give en Rod, der tilhører den givne Ligning: $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$. Hiin Lignings Opløsning er altsaa en Vei til dennes. Men, da Ligningen for x er af samme Grad som den for y, synes der ved første Øiekast ikke meget vundet ved denne Transformation. Ved en nøiere Betragtning vise sig derimod tvende Fordele, een væsentlig og een tilfældig.

Den væsentlige Fordeel bestaaer deri at man 1) kan forvandle enhver Ligning for z i en anden for y, hvor Tegnene staae under en regelmæssig Afvexling, hvor altsaa alle Rødder ere positive. Da man nu, efter den her givne Methode, kan finde en corresponderende Ligning for x af den Beskaffenhed, at tvende af dens Rødder tilsammentagne give en Rod y, saa følger deraf:

α) enten at alle Rødder x ere positive, i hvilket Tilfælde hvert x maa være mindre end hver af Rødderne y;

β) eller at den eene negative Rod x dog er mindre end den mindste af de tvende positive, og at den største af disse igien er mindre end den største af Rødderne y.

γ) Endelig, at der i Ligningen for x ikke kan være to, og endnu mindre tre negative Rødder.

2) At man altsaa erholder en Ligning, hvis Rødder ere mindre end den givne Lignings Rødder, hvilket altid er en mærkelig Fordeel.

Anmærkning. Skulde Tegnene, tvertimod Sætningen y, hentyde paa to eller tre negative Rødder, da er dette, som bekiendt, et Criterium paa imaginaire Rødders Tilstædeværelse i een af Ligningerne. Undersøgelsen desangaaende forbeholder jeg mig til en anden Leilighed gives at afhandle dette noget vanskelige Æmne.

Den

Den tilfældige Fordeel, men som er des betydeligere hvor den gives, bestaaer deri, at i Ligningen $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$ Coefficienterne A, B og C tilfældigviis kunde have den Relation til hinanden, at $C = \frac{A^3 - 4AB}{8}$, hvilket Tilfælde giver $c = 0$, altsaa

$$x^3 - \tfrac{1}{2}Ax^2 + (B - \tfrac{1}{4}A^2)x - 0 = 0, \text{ en Ligning,}$$

hvis Rødder ere:
$$\begin{aligned} x &= 0, \\ x' &= \tfrac{1}{4}A + \sqrt{(\tfrac{5}{16}A^2 - B)}, \\ x'' &= \tfrac{1}{4}A - \sqrt{(\tfrac{5}{16}A^2 - B)}; \end{aligned}$$

hvoraf igien findes:
$$\begin{aligned} y &= x + x' = \tfrac{1}{4}A + \sqrt{(\tfrac{5}{16}A^2 - B)}, \\ y' &= x + x'' = \tfrac{1}{4}A - \sqrt{(\tfrac{5}{16}A^2 - B)}, \\ y'' &= x' + x'' = \tfrac{1}{2}A. \end{aligned}$$

Functionen $y^3 - Ay^2 + By - \frac{A^3 - 4AB}{8} = 0$, lader sig altsaa almindelig opløse i sine tre Factorer: $y - \frac{1}{4}A + \sqrt{(\frac{5}{16}A^2 - B)} = 0$, $y - \frac{1}{2}A = 0$, og $y - \frac{1}{4}A - \sqrt{(\frac{5}{16}A^2 - B)} = 0$, hvilken Opløsnings Rigtighed enhver let kan overbevise sig om a posteriori, skiøndt Veien dertil er a priori.

Paa en lignende Maade seer man let, at de høiere Ligningers Opløsning, under visse Betingelser, kan reduceres til Opløsningen af Ligninger, der ere 1, 2, 3 eller flere Grader ringere, at der for hver Nedstignings-Grad kommer en ny Betingelse til de forrige; endelig, at alle Coefficienter, naar man vil nedstige til den qvadratiske Ligning, maae blive bestemte Functioner af de tvende første Coefficienter A og B. Imidlertid da den cubiske og biqvadratiske Lignings Opløsning kan ansees at være given, saa sees og tillige at Ligninger af femte Grad under en vis Betingelse ere almindelig opløselige, Ligninger af siette Grad under tvende Betingelser, o. s. v. For femte Grad have vi nemlig:

$$\left.\begin{aligned} A &= 4a \\ B &= 6a^2 + b \\ C &= 4a^3 + 2ab - c \\ D &= a^4 + 3a^2b - 2ac + d \\ E &= a^3b - a^2c + ad - e \end{aligned}\right\} \text{Heraf følger atter:} \left\{\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{4}A \\ b &= B - \tfrac{3}{8}A^2 \\ c &= -C + \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{8}A^3 \\ d &= D - \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{16}A^2B + \tfrac{1}{256}A^4 \\ e &= -E + \tfrac{1}{4}AD - \tfrac{1}{16}A^2C + \tfrac{3}{1024}A^5 \end{aligned}\right.$$

Lignin-

Ligningen $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0$ er altsaa af den Beskaffenhed, at fire af dens Rødder tilsammentagne give en Rod y af den foresatte Ligning: $y^5 - Ay^4 + By^3 - Cy^2 + Dy - E = 0$. Denne Ligning kan da ansees for opløst naar den Relation:

$$E = \frac{3A^5 - 64A^2C + 256AD}{1024}$$

har Sted; thi i saa Fald bliver $e = 0$, og den subsidiaire Ligning bliver biqvadratisk, nemlig: $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$. Da nu denne tillader en almindelig Opløsning, saa erholde vi, foruden $x = 0$, fire Rødder, som vi ville kalde α, β, γ og δ, hvoraf igien udledes:

$$y = \alpha + \beta + \gamma$$
$$y' = \alpha + \beta + \delta$$
$$y'' = \alpha + \gamma + \delta$$
$$y''' = \beta + \gamma + \delta$$
$$y^{\mathrm{IV}} = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

fem Rødder, af hvilke de fire første efter Skinnet ere trinomiske, men i Grunden qvadrinomiske, fordi den fierde Rod $x = 0$ er udeladt.

Anmærkning. Antager man at det andet Led allerede er skaffet bort af den givne Ligning, eller at $A = 0$, da bliver $a = 0$, $b = B$, $c = -C$, $d = D$, $e = -E$, $f = F$, $g = -G$ &c., og det for alle Grader ($m = 1$ undtagen). I dette Tilfælde er det meget let at bestemme den subsidiaire Ligning. Thi da den givne er:

$$0 = y^m * + By^{m-2} - Cy^{m-3} + Dy^{m-4} - Ey^{m-5} + \ldots \pm W,$$

saa bliver den subsidiaire:

$$0 = x^m * + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + Ex^{m-5} + \ldots + W.$$

Naar man altsaa i enhver Ligning, hvoraf det andet Led er skaffet bort, forvandler Tegnene + og − til deres Modsatte ved tredie, femte, syvende og alle i Ordenen ulige Led, saa bliver den saaledes fremkomne Ligning af den Beskaffenhed, at $(m-1)$ Rødder af samme tilsammentagne udgiøre en Rod af den givne Ligning. Men da den givne paa samme Maade kan deriveres af den søgte, saa sees paa den anden Side, at $(m-1)$ Rødder af den givne Ligning udgiøre een Rod af den fundne. Dette er heller ikke underligt. De absolute

absolute Værdier for Rødderne y og Rødderne x maae være de samme, men da de i Ordnen ulige Coefficienter have modsatte Værdier, saa har enhver Rod i den ene Ligning en dertil svarende ligestor men med modsat Tegn bemærket Rod i den anden Ligning; følgelig er og enhver Summe af $(m-1)$ Rødder — det er, en Summe af m Rødder $\div$ Summen af een Rod, eller, da A (Summen af m Rødder) $=0$, det negative af een Rod — liig en Rod af den anden Ligning. Er f. Ex. Ligningen af fierde Grad og har de fire Rødder

$$+p,\ +q,\ -r,\ -s,$$

saa har den anden Ligning Rødderne:

$$-p,\ -q,\ +r,\ +s.$$

Da nu $p+q-r-s=0$, saa er ogsaa $-p-q+r+s=0$. Nu er Summen af tre Rødder i den første Ligning = Summen af alle fire Rødder $\div$ een af Rødderne. Kalde vi denne Summe S, saa ere Summerne af tre Rødder i den første Ligning:

$$S-p,\ S-q,\ S+r,\ S+s, \text{ eller, da } S=0,$$
$$=-p,\ -q,\ +r \text{ og } +s,$$

det er, liig Rødderne af den anden Ligning. Omvendt kalde vi Summen af alle fire Rødder i den anden Ligning Σ, saa blive Summerne af tre Rødder i samme Ligning:

$$\Sigma+p,\ \Sigma+q,\ \Sigma-r,\ \Sigma-s, \text{ eller, da } \Sigma=0,$$
$$p,\quad q,\quad -r,\quad -s.$$

det er, liig Rødderne af den første Ligning. Disse tvende Ligninger ere altsaa reciproqves, saaledes at den ene kan tiene til at opløse den anden, endskiøndt Bestemmelsen og Opdagelsen af denne Reciprocitet ikkun er en speciel Anvendelse af den her givne Methode at finde subsidiaire Ligninger.

Man tillade mig endnu at tilføie et Par numeriske Opgaver, for derved at sætte de abstractere Forskrivter i et klarere Lys.

Første Exempel.

Ligningen $x^4-48x^3+847x^2-6504x+18304=0$ er given. Man skal angive dens Rødder?

Antages $A=48$, $B=847$, $C=6504$ og $D=18304$, saa er den til $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0$ svarende subsidiaire Ligning følgende: $y^4-ay^3+by^2-cy+d=0$, hvis Coefficienter a, b, c, d maae bestemmes ved Hielp af den almindelige Opløsning. Da nemlig, for $m = 4$,

$A = 3a$, $B = 3a^2 + b$, $C = a^3 + 2ab - c$ og $D = a^2b - ac + d$,

saa erholdes omvendt:

$a = \frac{1}{3}A$, $b = B - \frac{1}{3}A^2$, $c = -C + \frac{2}{3}AB - \frac{1}{27}A^3$, og $d = D - \frac{1}{3}AC + \frac{1}{9}A^2B + \frac{2}{81}A^4$, eller i Talværdier:

$a = 16$, $b = 79$, $c = 120$, $d = 0$;

hvilket giver den subsidiaire biqvadratiske Ligning:

$y^4 - 16y^3 + 79y^2 - 120y + 0$, hvis ene Rod er 0.

De tre øvrige bestemmes ved følgende cubiske Ligning:

$y^3 - 16y^2 + 79y - 120 = 0$.

Lad os imidlertid antage dens Rødder at være følgende: $y' + y'' + y'''$, saa ere den biqvadratiske givne Lignings Rødder:

$x' = 0 + y' + y''$, $x'' = 0 + y' + y'''$, $x''' = 0 + y'' + y'''$, $x^{IV} = y' + y'' + y'''$.

Andet Exempel.

Man forlanger en cubisk Ligning af den Beskaffenhed at to af dens Rødder tilsammentagne give en Rod af denne Ligning:

$$y^3 - 16y^2 + 79y - 120 = 0.$$

For at iværksætte dette, antage man den subsidiaire Ligning

$$z^3 - \alpha z^2 + \beta z - \gamma = 0,$$

og da er i Følge de almindelige Formeler:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}a,\ \beta = b - \tfrac{1}{4}a^2 \text{ og } \gamma = \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{8}a^3 - c,$$

eller i Talværdier: $\alpha = 8$, $\beta = 15$, $\gamma = 0$;

hvilke Coefficienter give den subsidiaire Ligning:

$z^3 - 8z^2 + 15z - 0 = 0$, hvoraf atter en Rod er $= 0$.

De øvrige findes ved at opløse den qvadratiske Ligning

$z^2 - 8z + 15 = 0$, hvis Rødder ere 3 og 5.

Altsaa har man $z = 0$, $z' = 3$, $z'' = 5$.

Heraf,

Heraf, ved at forbinde Rødderne parviis, erholdes:

$$y' = 3,\ y'' = 5,\ y''' = 8.$$

Tilføies disse den i forrige Exempel fundne Rod $y = 0$, saa har man den subsidiaire biqvadratiske Lignings Rødder:

$$0,\ 3,\ 5,\ 8;$$

af hvilke tre tilsammentagne give en Rod af den foresatte Ligning. Man erholder altsaa, per Conznationem,

$$x' = 0+3+5 = 8,\ x'' = 0+3+8 = 11,\ x''' = 0+5+8 = 13,\text{ og}$$
$$x^{IV} = 3+5+8 = 16,$$ som Rødderne, man søgte.

Tredie Exempel.

Er den givne Ligning følgende:

$$x^3 - 12x^2 + 40x - 24 = 0,$$

altsaa $A = 12$, $B = 40$, $C = 24$, saa bliver

$$a = \tfrac{1}{2}A = 6,\ b = B - \tfrac{1}{4}A^2 = 4,\text{ og } c = \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{8}A^3 - C = 0;$$

følgelig den subsidiaire Ligning:

$$y^3 - 6y^2 + 4y - 0 = 0,$$

hvis Rødder ere: $0,\ 3 - \sqrt{5},\ 3 + \sqrt{5};$
altsaa ere den givnes: $3 - \sqrt{5},\ 3 + \sqrt{5},\ 6.$

Fierde Exempel.

Er os given følgende cubiske Ligning:

$$x^3 - 1098x^2 + 37708x - 41433184 = 0,$$

da findes den subsidiaire Lignings Coefficienter:

$$a = 549,\ b = 75607,\text{ og } c = 75059,$$ følgelig Ligningen selv:

$$y^3 - 549y^2 + 75607y - 75059 = 0,$$

hvis ene Rod aabenbar er $y' = 1$. Ved Divisionen, med $y - 1 = 0$, fremkommer den qvadratiske Ligning:

$$y^2 - 548y + 75059 = 0,$$

 hvis

hvis tvende Rødder ere:

$$y'' = 274 - \sqrt{17} \text{ og } y''' = 274 + \sqrt{17},$$

hvoraf igien udledes den givne Lignings Rødder:

$$x' = 275 - \sqrt{17},\quad x'' = 275 + \sqrt{17},\quad \text{og } x''' = 548.$$

Anm. Vilde man behandle den givne Ligning efter den saa kaldte Cardanske Regel, maatte man først sætte $x - 366 = u$, for at erholde følgende Ligning:

$$u^3 = 24860\,u + 1504048,$$

og da udvikle Værdierne af følgende sammensatte Udtryk:

$$u = \sqrt[3]{\left[752024 + \sqrt{\left(752024^2 - \frac{24860^3}{27}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[752024 - \sqrt{\left(752024^2 - \frac{24860^3}{27}\right)}\right]},$$

hvis simple Betragtning kan bevæge enhver Mathematiker til at see sig om efter beqvemmere Methoder.

Men skal den her fremsatte methodus æqvationum auxiliarium bruges med Fordeel, udfordres dertil, at man (i Fald det ikke allerede har Sted) forvandler den givne Ligning til en anden, hvis Rødder alle ere positive, fordi man af denne igien kan udlede en subsidiair Ligning, hvis Rødder ere mærkelig mindre end den afledede Lignings Rødder. Nu bestaaer Fordelen i ovenfor givne Opløsning deri, at Roden $y' = 1$ ligger langt fra de tvende andre $274 - \sqrt{17}$ og $274 + \sqrt{17}$. Men denne Fordeel tilbød sig her af sig selv, som en umiddelbar Følge af den givne Ligning. Da nu dette ikke altid kan ventes, saa bliver det vist et Undersøgelsen værdigt Spørgsmaal: Hvorledes skal man indrette den afledede Ligning (hvori alle Rødder ere positive), at den dertil svarende subsidiaire Ligning bekommer meget smaae fra de øvrige meget differerende Rødder? Denne tilligemed flere andre Undersøgelser over dette Æmne, samt nærmere Anvendelser i specielle Tilfælde, forbeholder jeg mig til en anden Leilighed, tilfreds med at have aabnet en ny Udsigt og derved forøget — om end kun ved et Differenzial — Haabet, eengang at komme i Besiddelse af den fuldkomne Opløsning af hiin store Opgave, der, fra Vieta til vore Dages store Mænd, beskiæftigede saa mange speculative Genier.